

# Compensadores para Modos Deslizantes de Segundo Orden

J. Antonio Rosales<sup>†</sup>    I. Boiko<sup>††</sup>    L. Fridman<sup>†††</sup>

<sup>†</sup>Doctorado en Ingeniería Eléctrica, UNAM, manerblind@hotmail.com

<sup>††</sup>Honeywell y Universidad de Calgary, Calgary, Alberta, Canada, i.boiko@ieee.org

<sup>†††</sup>Departamento de Ingeniería de Control, Facultad de Ingeniería, UNAM, lfridman@unam.mx

**Resumen**—En este trabajo, se presentan compensadores para sistemas controlados por algoritmo Twisting o Sub-optimal con el objetivo de reducir el efecto de *chattering* y mejorar el desempeño de los algoritmos ante perturbaciones. La compensación se realiza agregando compensadores de retardo de fase, el cual reduce el efecto de *chattering* e incrementa la ganancia equivalente  $k_n$  de los algoritmos mejorando el rechazo de perturbaciones. Los métodos de FD y LPRS son utilizados en el diseño. Se presenta un ejemplo de diseño con simulaciones.

**Palabras clave:** Modos deslizantes, Función Descriptiva, Dominio de la frecuencia.

## I. INTRODUCCIÓN

Con el surgimiento de los modos deslizantes (MD)(Emel'yanov, 1957), el principal problema para su implementación es la presencia de vibraciones de alta frecuencia y amplitud finita, conocidas como *chattering*. Por lo tanto, el análisis de *chattering* es un problema teórico de interés, pero también es un problema práctico de especial importancia.

Los Modos Deslizantes de Segundo Orden (MD2O) (Emel'yanov *et al.*, 1986) surgen como una técnica de control robusto con el argumento de que, teóricamente, son libres de *chattering*. Debido a esta característica, los MD2O son considerados como parte de los enfoques empleados para atenuar el *chattering*. Algunos de estos enfoques para tratar el problema de *chattering* son: (1) el uso de funciones saturación (Burton y Zinober, 1986), (Slotine y Li, 1991) en lugar de funciones signo con el objetivo de tener un controlador continuo; (2) el enfoque de observación (Bondarev *et al.*, 1985) que consiste en agregar un observador que estime los estados del sistema teniendo como salida los estados estimados libres de *chattering*; y (3) agregar un compensador (filtro pasa-bajas) (Allotta *et al.*, 2005) (Pisano y Usai, 2008) que atenúe los efectos de las dinámicas de alta frecuencia o *chattering*.

Sin embargo, en la década pasada surgen trabajos de análisis de MD2O en el dominio de la frecuencia que demuestran la existencia de *chattering* en MD2O, (Boiko *et al.*, 2004), (Boiko y Fridman, 2005), basándose en el argumento de que cualquier modelo es una aproximación del sistema real que representa y por lo tanto no considera las dinámicas parásitas intrínsecas de la planta causantes de *chattering* en el sistema. Los análisis mencionados muestran una forma de obtener los parámetros de *chattering*, amplitud

y frecuencia, que no solo permitieron saber de su existencia, sino también abrieron la posibilidad de proponer formas de atenuarlo y de mejorar el desempeño del controlador, usando el concepto de ganancia equivalente de un MD2O.

Tomando como base las herramientas de MD2O en el dominio de la frecuencia se ha propuesto el diseño de compensadores para atenuar el efecto de *chattering* y mejorar el desempeño del controlador en MD de primer orden, (Boiko, 2007), (Boiko, 2009), incrementando la ganancia equivalente del controlador.

En este trabajo, se presentan compensadores para sistemas controlados por algoritmo Twisting o Sub-optimal (MD2O) con el objetivo de reducir el efecto de *chattering* y mejorar el desempeño de los algoritmos ante perturbaciones. La compensación se realiza agregando compensadores de retardo de fase, los cuales reducen el efecto de *chattering* e incrementan la ganancia equivalente  $k_n$  de los algoritmos, mejorando el rechazo de perturbaciones. El método de LPRS es utilizado en el diseño. Se presenta un ejemplo de diseño con simulaciones.

La estructura del trabajo es la siguiente. La Sección II contiene el planteamiento del problema, La Sección III presenta el análisis con LPRS de los algoritmos Twisting y Sub-optimal. En la sección IV se presenta el diseño de compensadores con un ejemplo y con simulaciones, mostrando una comparación entre resultados teóricos y resultados de simulación.

## II. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El tipo de sistemas considerados en este trabajo son sistemas SISO que pueden representarse mediante su función de transferencia y se considera que son controlados por Twisting o Sub-optimal (Fig. 1)

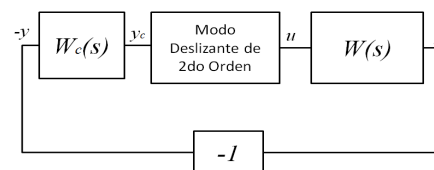


Figura 1. Sistema de control

La función de transferencia  $W(s)$  contiene la dinámica principal y dinámicas parásitas, actuador o sensores. Debido

a la presencia de dinámicas parásitas el sistema presenta *chattering*, (Boiko *et al.*, 2008) y (Boiko *et al.*, 2009), y el funcionamiento de las dinámicas promedio (estado permanente) se deteriora generando un rechazo no ideal de perturbaciones. La meta principal del trabajo es diseñar compensadores  $W_c(s)$  conectados en serie con la planta  $W(s)$ , ver Fig. 1, que atenúen *chattering* y mejoraren el funcionamiento del sistema con respecto al rechazo no ideal de perturbaciones.

Los compensadores propuestos son de adelanto de fase y de retardo de fase con función de transferencia  $W_{c_ade}(s)$  y  $W_{c_{ret}}(s)$ , respectivamente, (Boiko, 2007).

$$W_{c_{ret}}(s) = \frac{\frac{s}{\kappa\omega_0} + 1}{\frac{s}{\omega_0} + 1} \quad W_{c_{ade}}(s) = \frac{\frac{s}{\omega_0} + 1}{\frac{s}{\delta\omega_0} + 1}$$

donde  $\kappa, \delta > 1$  y  $\omega_0$  es la frecuencia característica del compensador. El diseño de los compensadores consiste en encontrar los valores de  $\kappa$  o  $\delta$  y  $\omega_0$  que resulten en el compensador que atenúe *chattering* y mejore el rechazo a perturbaciones del MD2O.

Las perturbaciones a tratar son perturbaciones constantes ( $D$ ), acopladas a la señal de control, ver figura 2. El análisis de perturbaciones se realiza con el concepto de ganancia equivalente, que consiste en reemplazar el MD2O por una ganancia constante  $k_n$  que permite obtener un sistema lineal equivalente que se emplea para analizar el sistema usando herramientas de sistemas lineales.

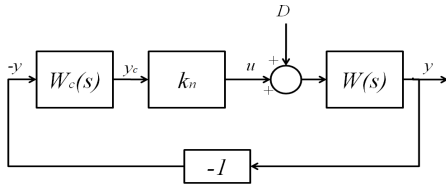


Figura 2. Sistema en presencia de perturbación

Los compensadores se diseñaron empleando las herramientas en el dominio de la frecuencia FD y LPRS. En la siguiente sección se muestra como se aplica FD y LPRS a los algoritmos *Twisting* y *Sub-optimal*.

### III. MÉTODOS EN FRECUENCIA PARA MD2O

#### III-A. Algoritmo *Twisting*

El algoritmo *Twisting* de modos deslizantes esta definido como

$$u = c_1 \text{sign}(y) + c_2 \text{sign}(\dot{y}) \quad (1)$$

donde las constantes  $c_1 > c_2 > 0$ , son los parámetros del algoritmo.

##### III-A.1. Función Descriptiva del Algoritmo *Twisting*:

El análisis con FD para *Twisting* se realiza con la ecuación de balance armónico mostrada a continuación (Boiko *et al.*, 2004):

$$\frac{1}{N(a_1)} = \frac{\pi a_1}{4} \frac{c_1 - jc_2}{(c_1^2 + c_2^2)} \quad (2)$$

donde  $a_1$  es la amplitud de la salida  $y$  y,  $c_1$  y  $c_2$ , son los parámetros del controlador.

Resolviendo de manera gráfica la ecuación 2 se obtiene el valor de  $a_1$  y la frecuencia de *chattering*  $\Omega$  en el punto de intersección entre la traza de Nyquist de la planta y el inverso negativo de la FD, ver figura 3.

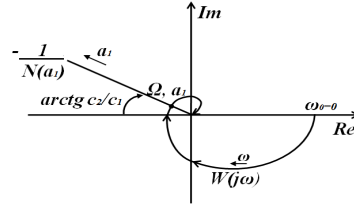


Figura 3. Análisis de *Twisting* con FD

Con  $a_1$  y  $\Omega$ , se puede calcular la ganancia equivalente del algoritmo *Twisting*, usando la siguiente fórmula:

$$k_{nTw1} = \frac{2c_1}{\pi a_1}$$

El modelo del sistema, en el cual el MD2O se reemplaza por su ganancia equivalente es una especie de linealización del sistema que puede aplicarse al análisis de la propagación de perturbaciones en el sistema.

III-A.2. LPRS del Algoritmo *Twisting*: El método LPRS para *Twisting* consiste en graficar la función  $J(\omega)$  (Boiko, 2005)

$$J(\omega) = \text{Re} \left[ \frac{W(j\omega)}{(1 + j\omega \cdot N_2 \cdot W(j\omega))} \right] + j \left[ L(\omega, 0) + \frac{c_2}{c_1} L(\omega, \theta) \right] \quad (3)$$

donde  $N_2 = \frac{4c_2}{\pi A_2}$ ;  $A_2 = \frac{4c_1\omega |W(j\omega)|}{\pi}$  y

$$L(\omega, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \{ \text{sen}[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Re}W[(2k-1)\omega] + \cos[(2k-1)2\pi\theta] \cdot \text{Im}W[(2k-1)\omega] \} \quad (4)$$

donde, ver figura 4,  $\Omega$  es la frecuencia que corresponde a la intersección con el eje real, mientras que la amplitud se obtiene a partir de la distancia entre el origen y la intersección con el eje real aplicando la siguiente fórmula:  $a = c_1/\pi \text{Re}(\Omega)$

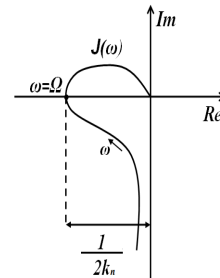


Figura 4. Análisis de *Twisting* con LPRS

La ganancia equivalente  $k_{nTwLPRS}$  puede ser obtenida directamente de la intersección del LPRS con el eje real mediante  $k_{nTwLPRS} = 1/2\text{Re}(\Omega)$ .

### III-B. Algoritmo Sub-optimal

El algoritmo *Sub-optimal* esta definido por la siguiente expresión

$$u = -U \cdot \text{sign}(y - \beta y_{Mi}) \quad (5)$$

donde  $\beta$  y  $U$  son los parámetros del controlador,  $y_{Mi}$  es el parámetro de anticipación, es decir, el último punto singular de  $y$ , por ejemplo, el valor de  $y$  en el último instante de tiempo  $t_{Mi}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) cuando  $\dot{y}(t_{Mi}) = 0$ .

Asuma que el comportamiento en estado estable de un sistema controlado por *Sub-optimal* es periódico y forma un ciclo limite que no tiene *offset*. Entonces, los puntos singulares  $y_M$  de la variable  $y$  son una secuencia de valores positivos y negativos con la misma magnitud:  $y_M^p, -y_M^p$  (donde "p" se refiere a periodo). La conmutación del control ocurre en el instante cuando la salida  $y(t)$  es igual a  $\beta y_M^p$  o a  $-\beta y_M^p$ . Esto corresponde a un comportamiento de relevador con histéresis.

**III-B.1. Función descriptiva del algoritmo Sub-optimal:** Debido a que el algoritmo *Sub-optimal* se comporta como un relevador con histéresis su FD es la de un relevador con esta característica, donde el valor de la histéresis es desconocido. Asumiendo que durante un periodo de movimiento los valores extremos de la salida  $y$  coinciden, en magnitud, con la amplitud de la oscilación, por lo tanto,  $y_M$  es la amplitud desconocida, se puede obtener el análisis en FD con la expresión siguiente (Boiko y Fridman, 2006):

$$-\frac{1}{N(a_y)} = -\frac{\pi a_y}{4U} (\sqrt{1 - \beta^2} - j\beta) \quad (6)$$

donde  $a_y$  es la amplitud de la salida y  $\beta$  es el parámetro del controlador.

Los parámetros  $a_y$  y  $\Omega$  se obtienen en el punto de intersección entre la traza de Nyquist de la planta y 6, ver Figura 5, y usando para la expresión  $a_y = 4UW(j\Omega)/\pi$

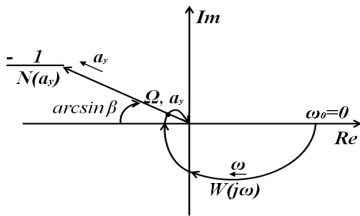


Figura 5. Análisis de Sub-Optimal con FD

La ganancia equivalente para *Sub-Optimal*  $k_{n,sub}$  se obtiene como (Boiko *et al.*, 2009):

$$k_n^* = \frac{2U}{\pi a_y \sqrt{1 - \beta^2}} \quad k_{n,sub} = k_n^* (1 + \beta) \quad (7)$$

Reemplazando el algoritmo por su ganancia equivalente da como resultado el modelo de propagación de perturbaciones a través del sistema.

**III-B.2. LPRS del Algoritmo Sub-optimal:** A pesar de que el algoritmo *Sub-optimal* puede representarse como un relevador con histéresis donde el valor de la histéresis depende de la amplitud de la oscilación y es por lo tanto desconocido, un método exacto para obtener los parámetros

de la oscilación puede obtenerse aplicando el siguiente procedimiento.

Considerando la siguiente función  $\phi(\omega)$

$$\Phi(\omega) = -\sqrt{[a_y(\omega)]^2 - y^2} \left( \frac{\pi}{\omega}, \omega \right) + jy \left( \frac{\pi}{\omega}, \omega \right)$$

donde  $y(\frac{\pi}{\omega}, \omega)$  es el valor de la salida del sistema en el instante de tiempo cuando el relevador conmuta desde  $-c$  a  $c$  ( $\pi/\omega$  es la mitad de un periodo y  $t = 0$  se asume, sin pérdida de generalidad, como el tiempo en el que el relevador conmuta de  $-c$  a  $c$ ),  $a_y(\omega)$  es la amplitud de la salida de la planta en el periodo considerado de frecuencia  $\omega$ :  $a_y = \max_{t \in [0, T]} |y(t, \omega)|$  y  $y(t, \omega)$  puede ser calculada mediante series de Fourier

$$y(t, \omega) = \frac{4c}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \left( \frac{1}{2} \pi k \right) \sin [k\omega t + \varphi(k\omega)] L(\omega k) \quad (8)$$

donde  $\varphi(k\omega) = \arg W(jk\omega)$ ,  $L(k\omega) = |W(jk\omega)|$  son la fase y la magnitud de  $W(j\omega)$  para la frecuencia  $k\omega$ , respectivamente.

La variable  $a_y(\omega)$  puede ser calculada usando (7) y  $y(\frac{\pi}{\omega}, \omega)$  como la parte imaginaria del LPRS o con la serie (8).

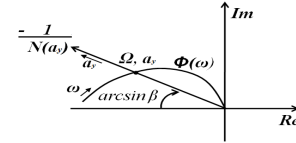


Figura 6. Análisis de Sub-Optimal con LPRS

Con la función  $\phi(\omega)$  calculada, realizamos el análisis de un posible movimiento periódico de la misma forma como en FD, simplemente reemplazando la traza de Nyquist de  $W(j\omega)$  con la función  $\phi(\omega)$ . La interpretación geométrica de este análisis se muestra en la figura 6.

Entonces, los parámetros de *chattering* para un sistema con algoritmo *Sub-optimal*, se encuentran en la intersección entre la función  $\phi(\omega)$  y el inverso negativo de la FD de *Sub-optimal*, donde la frecuencia correspondiente a la intersección de la función  $\phi(\omega)$  es la frecuencia de *chattering*  $\Omega$  y la amplitud de la salida es la correspondiente a la intersección del inverso negativo de la FD.

## IV. DISEÑO DE COMPENSADORES

Considere el siguiente sistema masa-resorte-amortiguador en un plano inclinado

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + u_a + D \end{aligned} \quad (9)$$

donde  $x_1$  y  $x_2$  son la posición y velocidad, respectivamente,  $D$  es una perturbación constante y  $u_a$  es la entrada de control desarrollada por un actuador con la siguiente dinámica

$$T_a \dot{u}_a + u_a = u \quad (10)$$

con constante de tiempo  $T_a = 0,01$  segundos. La entrada al actuador  $u$  esta dada por el algoritmo *Twisting* o *Sub-optimal*.

El diseño de los compensadores se presenta para el sistema conformado por (9) y (10) en la siguiente sección. Para el caso en que el algoritmo *Twisting* esta presente en el sistema el diseño se presenta con detalle, mientras que para el caso de *Sub-optimal* al ser igual el procedimiento se trata de una forma mas rápida.

#### IV-A. Compensador para un sistema controlado controlado por el algoritmo *Twisting*

En el diseño de los compensadores propuestos en este trabajo, existen dos parámetros que deben ser calculados, el primero es la frecuencia característica del compensador  $\omega_0$  y el segundo es el factor de separación  $\kappa$  en retardo de fase y  $\delta$  en adelanto de fase. Para calcular  $\omega_0$  del compensador de retardo de fase, seleccionamos la frecuencia media del compensador  $\omega_{mid} = \sqrt{\kappa\omega_0^2}$  coincidiendo con la frecuencia media del rango entre  $\omega_{max}$  y  $\Omega$ ,  $\omega_{mid} = \sqrt{\kappa\omega_0^2} = \sqrt{\omega_{max}\Omega}$  teniendo como resultado

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_{max}\Omega}{\kappa}} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\omega_{max}\Omega}{\delta}} \quad (11)$$

donde  $\omega_{max}$  representa la frecuencia de corte del sistema (planta+actuador) y  $\Omega$  representa la frecuencia de *chattering*. La frecuencia característica  $\omega_0$  del compensador de adelanto de fase se calcula de la misma manera, dando como resultado la expresión del lado derecho de 11. Los parámetros de separación en los dos casos se eligen en función de que porcentaje se quiere reducir la frecuencia o que porcentaje se quiere aumentar la frecuencia.

Entonces, como primer paso en el diseño se obtiene la frecuencia de *chattering*  $\Omega$  con el método de FD o con LPRS, y se considera que el sistema tiene como controlador el algoritmo *Twisting* siguiente:

$$u = -0,8 \cdot \text{sign}(y) - 0,6 \cdot \text{sign}(\dot{y}) \quad (12)$$

el resultado del análisis con FD mostrado en la figura 7, resulta en  $\Omega = 78,7$ .

La frecuencia  $\omega_{max} = 1,27$  es obtenida a partir del diagrama de Bode del sistema (planta+actuador). Por lo tanto con la expresión (11) y considerando los valores siguientes:  $\Omega = 78,7$ ,  $\omega_{max} = 1,27$  y  $\kappa = 2$  para disminuir  $\Omega$  un 20 por ciento, la frecuencia característica del compensador de retardo es  $\omega_0 = 7,07$ . El compensador correspondiente es:

$$W_{cret}(s) = \frac{0,07073s + 1}{0,1415s + 1} \quad (13)$$

considerando el mismo procedimiento, el compensador de adelanto de fase proponiendo  $\delta = 2,5$ , que corresponde a aumentar  $\Omega$  un 25 por ciento, es:

$$W_{cade}(s) = \frac{0,1582s + 1}{0,06326s + 1} \quad (14)$$

La figura 7 muestra los resultados obtenidos, usando el método de FD. Como lo muestran los resultados, el compensador de retardo de fase disminuye la frecuencia de *chattering*  $\Omega$  y la amplitud  $a_y$  mientras que el compensador de adelanto de fase incrementa la frecuencia de *chattering*  $\Omega$  y la amplitud  $a_y$ , en los dos casos se cumple el porcentaje de

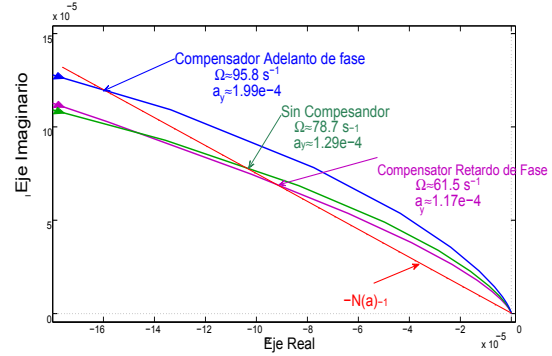


Figura 7. Análisis de Compensadores para Twisting con FD

aumento y decremento asignado por  $\kappa$  y  $\delta$ , respectivamente

La figura 8 muestra el análisis con el método de LPRS. Como puede apreciarse en las figuras 7 y 8, los valores de  $\Omega$  y  $a_y$  no resultan ser los mismos. Pero tomando en cuenta que teóricamente el método LPRS es exacto a diferencia de FD que es aproximado se puede concluir que los resultados del análisis en el caso de LPRS son más confiables, esto podrá verificarse más adelante cuando sean presentados los resultados de simulación del presente análisis.

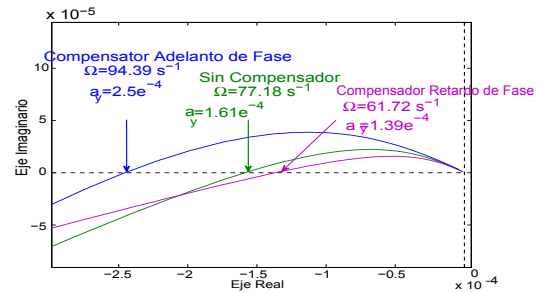


Figura 8. Análisis de Compensadores para Twisting con LPRS

El análisis del efecto que tiene agregar un compensador en el comportamiento del sistema controlado por *Twisting* cuando se presentan perturbaciones constantes  $D$ , se hace empleando el concepto de ganancia equivalente  $k_{nTw}$ , entonces el diagrama de bloques que representa el lazo de control analizado es el mostrado en la figura 2. Calculando la función de transferencia de la perturbación  $D$  a  $y$  y calculando aplicando el teorema del valor final se obtiene el error en estado permanente siguiente

$$y_{sttw} = \frac{D}{k_{nTw1} + 1} \quad (15)$$

Por lo tanto, asumiendo que  $D = 0,1$  y considerando (15), las ganancias equivalentes con sus respectivos valores en estado estable obtenidos en presencia de los compensadores diseñados se muestran en la Tabla I, donde  $k_{nTwFD}$  y  $k_{nTwLPRS}$  representan las ganancias equivalentes calculadas con los parámetros de las oscilaciones obtenidos con

FD y LPRS, respectivamente. En el caso de  $y_{sstwFD}$  y  $y_{sstwLPRS}$  se considera lo mismo.

De la Tabla I, el efecto producido al agregar un compensador de retardo de fase, comparado con un compensador de adelanto de fase, mejora el comportamiento del sistema cuando una perturbación se presenta, además de reducir el valor de la salida en estado permanente, el análisis mediante FD y LPRS muestran que la presencia de dicho compensador en el lazo de control reduce la frecuencia *chattering* y la amplitud de la oscilación en la salida del sistema.

La figura 9 muestra los valores de  $\Omega$  y  $a_y$  obtenidos en las simulaciones del sistema masa-resorte-amortiguador con la presencia de los compensadores diseñados y la figura 10 muestra los errores en estado permanente en presencia de  $D$ .

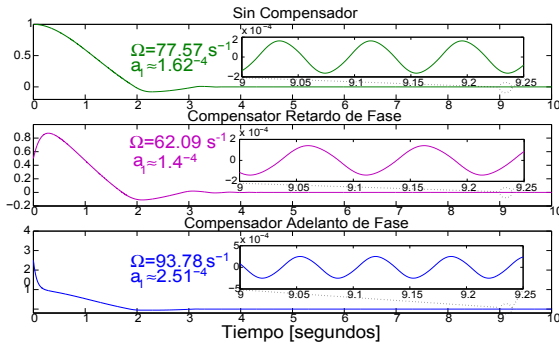


Figura 9. Simulación de Compensadores para Twisting

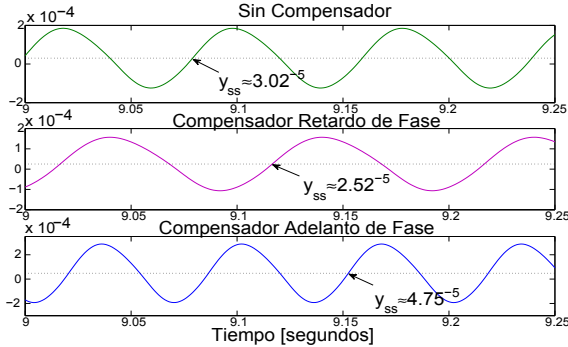


Figura 10. Simulación del valor en estado estable para Twisting

Como comparación entre los métodos empleados, se presenta la Tabla II donde se observa que el método LPRS tiene una mejor aproximación a los valores obtenidos en las simulaciones, con esto se puede confirmar, como se menciona antes, que éste método entrega valores más confiables de los parámetros de oscilación.

#### IV-B. Compensator for Sub-Optimal

El compensador para el sistema controlado por *Sub-optimal* se diseña considerando el siguiente controlador:

$$u = -0,1 \cdot \text{sign}(y - 0,5y_{Mi}) \quad (16)$$

Por lo tanto con  $\omega_{max} = 1,27$ ,  $\Omega = 59$  obtenida a partir del análisis en FD,  $\kappa = 1,5$  para decrecer 15 por

ciento la frecuencia y  $\delta = 2$  para aumentar 20 por ciento la frecuencia, los compensadores de retardo y adelanto de fase son:

$$W_{c_{ret}}(s) = \frac{0,09315s + 1}{0,1397s + 1} \quad (17)$$

$$W_{c_{ade}}(s) = \frac{0,1613s + 1}{0,08067s + 1} \quad (18)$$

La figura 11 muestra el efecto de cada compensador usando FD. Como puede verse el compensador de retardo de fase disminuye la frecuencia de *chattering* y la amplitud de las oscilaciones en la salida de la planta, mientras que el compensador de adelanto aumenta el valor de amplitud y frecuencia.

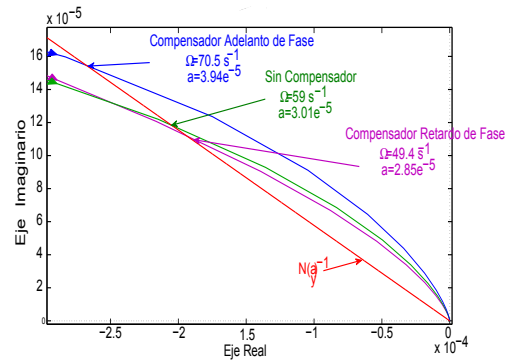


Figura 11. Análisis de Compensadores para Sub-optimal con FD

En la Figura 12 se muestran los parámetros de las oscilaciones usando LPRS. Los resultados obtenidos con FD y LPRS son aproximados, resaltando otra vez que los valores obtenidos usando LPRS son más confiables por la exactitud teórica del método.

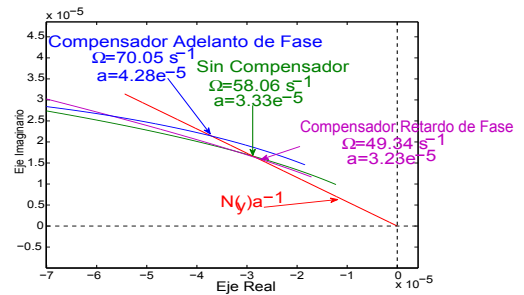


Figura 12. Análisis de Compensadores para Sub-optimal con LPRS

El análisis del sistema en presencia de perturbaciones es igual que con *Twisting*, dando como resultado que la expresión para calcular el valor en estado estable de la salida para *Sub-optimal*  $y_{ssub}$  sea la misma que en el caso de  $y_{stw}$ .

Por lo tanto, con los parámetros de oscilaciones obtenidos en el análisis de FD y LPRS se calculan las ganancias equivalentes  $k_{nsubFD}$  (7) y  $k_{nsubLPRS}$  respectivas a los compensadores diseñados y asumiendo que la perturbación

$D = 0,08$ , los valores en estado estable en presencia de los compensadores son los mostrados en la Tabla I

**TABLA I**  
**GANANCIAS EQUIVALENTES Y VALORES EN ESTADO ESTABLE,**  
*Sub-optimal*  $\%Ct kdc + \%Vy kskpi \%cdclq+$

	Sin Compensador	Compensador de Retardo	Compensador de Adelanto
$k_{nsubFD}$	3661.2	3866	2797.3
$k_{nsubLPRS}$	3311.3	3413.8	2576.3
$y_{sssubFD}$	$2.18e^{-5}$	$2.07e^{-5}$	$2.86e^{-5}$
$y_{sssubLPRS}$	$2.42e^{-5}$	$2.34e^{-5}$	$3.1e^{-5}$
$k_{nTwFD}$	3948	4353	2559.3
$k_{nTwLPRS}$	3163.3	3664	2037.2
$y_{sstwFD}$	$2.53e^{-5}$	$2.3e^{-5}$	$3.91e^{-5}$
$y_{sstwLPRS}$	$3.16e^{-5}$	$2.73e^{-5}$	$4.91e^{-5}$

Considerando la Tabla I el compensador de retardo de fase disminuye el error en estado estable del sistema en presencia de perturbaciones, esto se debe a que agregando el compensador se aumenta el valor de la ganancia equivalente  $k_{nsub}$ , lo anterior se concluye al comparar el compensador de retardo de fase con el de adelanto de fase cuya aportación al sistema es contraria a la del compensador de retardo de fase.

Las figuras 9 y 14, muestran las simulaciones de los parámetros de las oscilaciones y de valores en estado permanente, respectivamente.

En la Tabla II, se comparan los valores obtenidos por los dos métodos empleados con los valores de las simulaciones. En este caso la comparación muestra, una vez más, la confiabilidad de los valores obtenidos con el método LPRS, debido a que dichos valores son más aproximados a los valores obtenidos de las simulaciones.

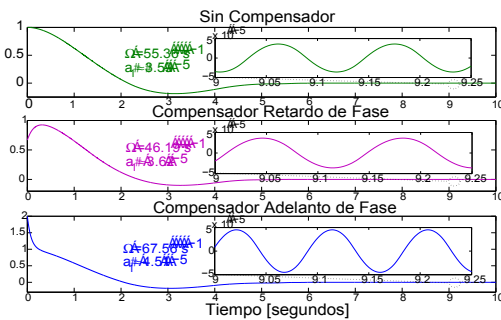


Figura 13. Simulación de Compensadores para Sub-optimal

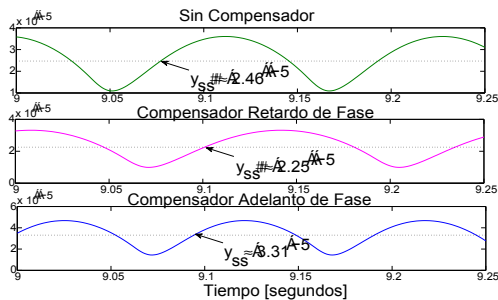


Figura 14. Simulación del valor en estado estable para Sub-optimal

**TABLA II**  
**ANÁLISIS DE COMPENSADORES**  
*Sub-optimal*  $\%Ct kdc + \%Vy kskpi \%cdclq+$

	FD			LPRS			Simulación		
	a	$\Omega$	$y_{ss}$	a	$\Omega$	$y_{ss}$	a	$\Omega$	$y_{ss}$
Sin	$3.01e^{-5}$	59	$2.18e^{-5}$	$3.33e^{-5}$	58.06	$2.42e^{-5}$	$3.59e^{-5}$	55.36	$2.46e^{-5}$
Retardo	$2.85e^{-5}$	49.4	$2.07e^{-5}$	$3.23e^{-5}$	49.34	$2.34e^{-5}$	$3.62e^{-5}$	46.19	$2.25e^{-5}$
Adelanto	$3.94e^{-5}$	70.5	$2.86e^{-5}$	$4.28e^{-5}$	70.05	$3.1e^{-5}$	$4.51e^{-5}$	67.56	$3.31e^{-5}$
Sin	$1.29e^{-4}$	78.7	$2.53e^{-5}$	$1.61e^{-4}$	77.18	$3.16e^{-5}$	$1.62e^{-4}$	77.57	$3.02e^{-5}$
Retardo	$1.17e^{-4}$	61.5	$2.3e^{-5}$	$1.39e^{-4}$	61.72	$2.73e^{-5}$	$1.4e^{-4}$	62.09	$2.52e^{-5}$
Adelanto	$1.99e^{-4}$	95.8	$3.91e^{-5}$	$2.5e^{-4}$	94.39	$4.91e^{-5}$	$2.51e^{-4}$	93.78	$4.75e^{-5}$

## V. CONCLUSIONES

El diseño de compensadores para los algoritmos Twisting y Sub-Optimal muestra que el funcionamiento del sistema controlado por un modo deslizante de segundo orden puede ser mejorado. Esto se hace aumentando la ganancia equivalente de los algoritmos, lo cual se realiza cambiando la respuesta en frecuencia del sistema. El ejemplo de diseño y las simulaciones muestran una buena aproximación entre los resultados teóricos de funcionamiento y el comportamiento del sistema vía simulaciones.

## REFERENCIAS

- Allotta, B., A. Pisano, L. Pugi y E Usai (2005). VSC of a servo-actuated atr90-type pantograph. En: *European Control Conference 2005*. Seville, Spain. pp. 590–595.
- Boiko, I. (2005). Analysis of sliding mode in frequency domain. *International Journal of Control* **78**(13), 969–981.
- Boiko, I. (2007). Analysis of closed-loop performance and frequency-domain design of compensating filters for sliding mode control systems. *IEEE Trans. Automatic Control* **52**, 1882–1891.
- Boiko, I. (2009). *Discontinuous control systems, Frequency-Domain Analysis and Design*. Birkhäuser Boston. Boston.
- Boiko, I., L. Fridman, A. Pisano y E. Usai (2009). On the transfer properties of the "generalized sub-optimal" second-order sliding mode control algorithm. *IEEE Trans. Automatic Control* **54**(2), 399–403.
- Boiko, I., L. Fridman y M.L. Castellanos (2004). Analysis of second-order sliding mode algorithms in the frequency domain. *IEEE Trans. Automatic Control* **49**(6), 946–950.
- Boiko, I., M.L. Castellanos y L. Fridman (2008). Analysis of response of second-order sliding mode controllers to external inputs in frequency domain. *International Journal of Robust and Nonlinear Control* **18**, 502–514.
- Boiko, I. y L. Fridman (2005). Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers. *IEEE Trans. Automatic Control* **50**(9), 1442–1446.
- Boiko, I. y L. Fridman (2006). Frequency domain analysis of second order sliding modes. En: *Advances in Variable Structure and Sliding Mode Control* (C. Edwards, E. Fossas y L. Fridman, Eds.). pp. 125–142. Lecture Notes in Control and Information Science. Springer Verlag, Berlin, Germany.
- Bondarev, A.G., S.A. Bondarev, N.E. Kostyleva y V.I. Utkin (1985). Sliding modes in systems with asymptotic state observers. *Automation and Remote Control* **46**, 679–684.
- Burton, J.A. y A.S.I. Zinober (1986). Continuous approximation of variable structure control. *International Journal of Systems of Science* **17**, 875–888.
- Emel'yanov, S. V. (1957). Method of designing complex control algorithms using an error and its first derivative. *Automation and Remote Control* **18**(10), 123–133.
- Emel'yanov, S. V., S. K. Korovin y L. V. Levantovsky (1986). Second order sliding modes in controlling uncertain processes. *Soviet Journal of Computer and System Science* **24**(4), 63–68.
- Pisano, A. y E. Usai (2008). Contact force regulation in wire-actuated pantographs via variable structure control and frequency-domain techniques. *International Journal of Control* **81**(11), 1747–1762.
- Slotine, J.-J. E. y W. Li (1991). *Applied Nonlinear Control*. Prentice Hall Inc., London, Great Britain.